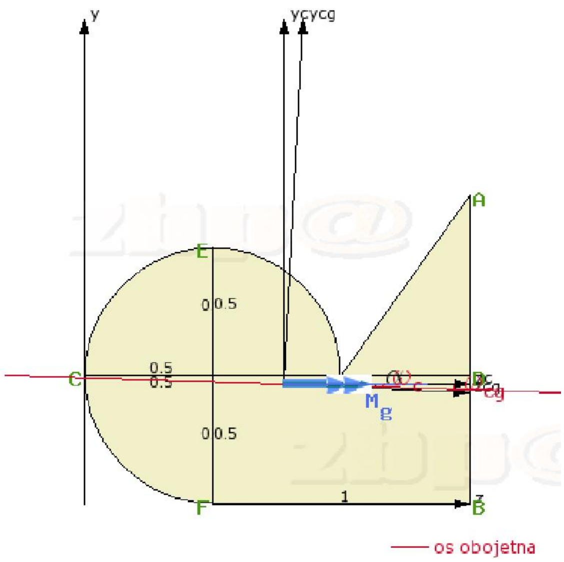
Wyznacz naprężenia jakie powstają w przekroju przedstawionym na rysunku gdy moment M_g działa w 1 płaszczyźnie ***.***
M_g= 1000 Nmm ***i tworzy z płaszczyzną Oxy kąt β=*** 0 ***o.***

Przekrój belki i jego obciążenie przedstawiono na rysunku



Współrzędne środka ciężkości przekroju w układzie współrzędnych Ozy są następujące:

z_c=0.78*a* i y_c=0.47*a*

Pozostałe punkty (oznaczone ()=A,B,C...) przekroju w układzie współrzędnych Oz_cy_c są następujące

$z_{c()}=z_{()}-z_c$
$y_{c()}=y_{()}-y_c$

w obróconym o kąt α=-2.94^0 układzie współrzędnych $Oz_{cg}y_{cg}$ poszczególne współrzędne punktów transformują się z układu współrzędnych Oz_cy_c wg zależności

$z_{cg()}=z_{c()}\cos(\alpha)+y_{c()}\sin(\alpha)$
$y_{cg()}=-z_{c()}\sin(\alpha)+y_{c()}\cos(\alpha)$

punkt ()	Współrzędne punktu w układzie współrzędnych					
	Ozy		Oz_cy_c		$Oz_{cg}y_{cg}$	
	z	y	z_c	y_c	z_{cg}	y_{cg}
A	1.50*a*	1.20*a*	0.72*a*	0.73*a*	0.68*a*	0.77*a*
B	1.50*a*	0.00*a*	0.72*a*	-0.47*a*	0.74*a*	-0.43*a*
C	0.00*a*	0.50*a*	-0.78*a*	0.03*a*	-0.78*a*	-0.01*a*
D	1.50*a*	0.50*a*	0.72*a*	0.03*a*	0.72*a*	0.07*a*
E	0.50*a*	1.00*a*	-0.28*a*	0.53*a*	-0.31*a*	0.52*a*
F	0.50*a*	0.00*a*	-0.28*a*	-0.47*a*	-0.26*a*	-0.48*a*

Główne centralne momenty bezwładności dla przekroju to:

$I_{zcg}=0.09\ a^4$
$I_{ycg}=0.23\ a^4$

występują one pod kątem α = 2.94 w przyjętym układzie współrzędnych.

Wykorzystując główne centralne momenty bezwładności przekroju, naprężenia w poszczególnych punktach obliczamy z zależności:

$$\sigma_{()} = M_g\left(\frac{z_{cg()}\cdot\sin(\alpha-\beta)}{I_{ycg}} + \frac{y_{cg()}\cdot\cos(\alpha-\beta)}{I_{zcg}}\right)$$

W wybranych punktach naprężenia wynoszą:

$$\sigma_A = 1000\cdot 1\cdot(\frac{0.68a\cdot\sin(-2.94-0)}{0.23a^4} + \frac{0.77a\cdot\cos(-2.94-0)}{0.09a^4}) = 8294.58\ \frac{1}{a^3}$$

$$\sigma_B = 1000\cdot 1\cdot(\frac{0.74a\cdot\sin(-2.94-0)}{0.23a^4} + \frac{-0.43a\cdot\cos(-2.94-0)}{0.09a^4}) = -4873.84\ \frac{1}{a^3}$$

$$\sigma_C = 1000\cdot 1\cdot(\frac{-0.78a\cdot\sin(-2.94-0)}{0.23a^4} + \frac{-0.01a\cdot\cos(-2.94-0)}{0.09a^4}) = 104.45\ \frac{1}{a^3}$$

$$\sigma_D = 1000\cdot 1\cdot(\frac{0.72a\cdot\sin(-2.94-0)}{0.23a^4} + \frac{0.07a\cdot\cos(-2.94-0)}{0.09a^4}) = 613\ \frac{1}{a^3}$$

$$\sigma_E = 1000\cdot 1\cdot(\frac{-0.31a\cdot\sin(-2.94-0)}{0.23a^4} + \frac{0.52a\cdot\cos(-2.94-0)}{0.09a^4}) = 5760.81\ \frac{1}{a^3}$$

$$\sigma_F = 1000\cdot 1\cdot(\frac{-0.26a\cdot\sin(-2.94-0)}{0.23a^4} + \frac{-0.48a\cdot\cos(-2.94-0)}{0.09a^4}) = -5212.87\ \frac{1}{a^3}$$

Dla osi obojętnej naprężenia wynoszą

$$\sigma_{()} = M_g\ (\frac{z_{cg()}\cdot\sin(\alpha-\beta)}{I_{ycg}} + \frac{y_{cg()}\cdot\cos(\alpha-\beta)}{I_{zcg}}) = 0$$

po przekształceniu otrzymujesz równanie osi obojętnej

$$y_{cg} = -\ tg(\alpha-\beta)\ \frac{I_{zcg}}{I_{ycg}}\ z_{cg}$$

gdy podstawisz

$$tg(\omega_{cg}) = -\ tg(\alpha-\beta)\ \frac{I_{zcg}}{I_{ycg}}$$

równanie to przyjmuje postać

$$y_{cg} = tg(\omega_{cg})\cdot z_{cg}$$

gdzie ω_{cg} jest kątem jaki tworzy oś obojetna z osią z_{cg} i wynosi on

$$tg(\omega_{cg}) = -\ tg(-2.94^o-0^o)\ \frac{0.09}{0.23} = 0.0205$$

$$\omega_{cg} = arctg(0.0205) = 1.17^o$$

Gdy do obliczania naprężeń w poszczególnych punktach wykorzytujesz centralne momenty bezwładności to naprężenia wynoszą wówczas

$$\sigma_{()} = \frac{\mathcal{M}_{gz}\cdot y_{c()}}{I_{zc}} - \frac{\mathcal{M}_{gy}\cdot z_{c()}}{I_{yc}}$$

gdzie, we wzorze poszczególne wielkości są następujące

$$\frac{1}{K} = 1 - \frac{J_{zcyc}{}^2}{I_{zc}\cdot I_{yc}}$$

$$\mathcal{M}_{gy} = K(\ M_{gy} + M_{gz}\ \frac{J_{zcyc}}{I_{zc}})$$

$$\mathcal{M}_{gz} = K(\ M_{gz} + M_{gy}\ \frac{J_{zcyc}}{I_{yc}})$$

$$M_{gz} = M_g\cdot\cos(\beta)$$

$$M_{gy} = M_g\cdot\sin(\beta)$$

gdy:

$J_{zc} = 0.09\ a^4$

$J_{yc} = 0.23\ a^4$

$J_{zcyc} = -0.01\ a^4$

Wyznaczając te wielkości otrzymujesz:

$$\frac{1}{K} = 1 - \frac{(-0.01a^4)^2}{0.09a^4\cdot 0.23a^4}$$

$K = 1.002$

$M_{gz} = 1000 \cdot \cos(0) = 1000\ Nmm$

$M_{gy} = 1000 \cdot \sin(0) = 0\ Nmm$

$$M_{gy} = 1.002 \cdot \left(0 + 1000 \frac{-0.01a^4}{0.09a^4} \right)$$

$$M_{gy} = -77.37\ Nmm$$

$$M_{gz} = 1.002 \cdot \left(1000 + 0 \frac{-0.01a^4}{0.23a^4} \right)$$

$$M_{gz} = 1002.39\ Nmm$$

możesz określić naprężenia w interesujących Cię punktach. Naprezenia te wynoszą

$$\sigma_A = \frac{1002.39 \cdot 1 \cdot 0.73a}{0.09a^4} - \frac{-77.37 \cdot 1 \cdot 0.72a}{0.23a^4} = 8294.58 \frac{1}{a^3}$$

$$\sigma_B = \frac{1002.39 \cdot 1 \cdot (-0.47a)}{0.09a^4} - \frac{-77.37 \cdot 1 \cdot 0.72a}{0.23a^4} = -4873.84 \frac{1}{a^3}$$

$$\sigma_C = \frac{1002.39 \cdot 1 \cdot 0.03a}{0.09a^4} - \frac{-77.37 \cdot 1 \cdot (-0.78a)}{0.23a^4} = 104.45 \frac{1}{a^3}$$

$$\sigma_D = \frac{1002.39 \cdot 1 \cdot 0.03a}{0.09a^4} - \frac{-77.37 \cdot 1 \cdot 0.72a}{0.23a^4} = 613 \frac{1}{a^3}$$

$$\sigma_E = \frac{1002.39 \cdot 1 \cdot 0.53a}{0.09a^4} - \frac{-77.37 \cdot 1 \cdot (-0.28a)}{0.23a^4} = 5760.81 \frac{1}{a^3}$$

$$\sigma_F = \frac{1002.39 \cdot 1 \cdot (-0.47a)}{0.09a^4} - \frac{-77.37 \cdot 1 \cdot (-0.28a)}{0.23a^4} = -5212.87 \frac{1}{a^3}$$

I w tym wypadku dla osi obojętnej naprężenia wynoszą 0 .

$$\sigma = \frac{M_{gz} \cdot y_{c()}}{I_{zc}} - \frac{M_{gy} \cdot z_{c()}}{I_{yc}} = 0$$

Równanie osi obojętnej to

$$y_c = \frac{M_{gy}}{M_{gz}} \frac{I_{zc}}{I_{yc}} z_c$$

lub

$$y_c = tg(\omega)\ z_c$$

gdzie

$$tg(\omega_c) = \frac{M_{gy}}{M_{gz}} \frac{I_{zc}}{I_{yc}}$$

po podstwieniu

$$tg(\omega_c) = \frac{-77.37}{1002.39} \frac{0.09}{0.23} = -0.0309$$

a kąt ω_c jaki tworzy oś obojetna z osią z_c wynosi

$$\omega_c = arctg(-0.0309) = -1.77^o$$

Maksymalne naprężenie musi spełniać warunek

$$\sigma = 8294.58 \frac{1}{a^3} \leq k_r = 100\ MPa$$

więc parametr przekroju

$$a \geq \sqrt[3]{\frac{8294.58}{k_r}} = \sqrt[3]{\frac{8294.58\ Nmm}{100\ \frac{N}{mm^2}}} = 4.4\ mm$$