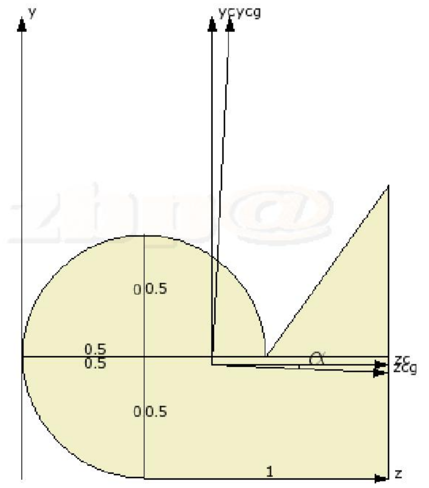
Dla pola przedstwionego na rysunku wyznacz:

- ***położenie środka ciężkości z_c , y_c tego pola***
- ***moment statyczny pola względem osi z i y***
- ***momenty bezwładności wzgledem osi z i y***
- ***momenty bezwładności względem osi centralnych i głównych centralnych***
- ***kąt między osią centralną i główną centralną***

Dane przekrojju: Popraw



podane w tabeli dla poszczególnych pól. Wyznaczono tez położenia środków cieżkości poszczególnych pól.

i	z_{ci}		y_{ci}		b_i	h_i	d_i	A	A_i
1	$0.5a-\frac{4\cdot d_i}{3\cdot 2\cdot \pi}=$	0.29 *a*	$0.5a+\frac{4\cdot d_i}{3\cdot 2\cdot \pi}=$	0.71 *a*			1.00 *a*	$\frac{\pi\cdot d_i^2}{16}$	0.20 a^2
2	$0.5a+\frac{4\cdot d_i}{3\cdot 2\cdot \pi}=$	0.71 *a*	$0.5a+\frac{4\cdot d_i}{3\cdot 2\cdot \pi}=$	0.71 *a*			1.00 *a*	$\frac{\pi\cdot d_i^2}{16}$	0.20 a^2
3	$0.5a-\frac{4\cdot d_i}{3\cdot 2\cdot \pi}=$	0.29 *a*	$0.5a-\frac{4\cdot d_i}{3\cdot 2\cdot \pi}=$	0.29 *a*			1.00 *a*	$\frac{\pi\cdot d_i^2}{16}$	0.20 a^2
4		1.00 *a*		0.25 *a*	1.00 *a*	0.50 *a*		$b_i\cdot h_i$	0.50 a^2
5		1.33 *a*		0.73 *a*	0.50 *a*	0.70 *a*		$\frac{b_i\cdot h_i}{2}$	0.18 a^2
								A =	**1.26 a^2**

$$z_c=\frac{\sum_{i=1}^{i=5} A_i z_{ci}}{\sum_{i=1}^{i=5} A_i}=\frac{S_y}{\sum_{i=1}^{i=5} A_i}$$

$$z_c=\frac{A_1\cdot z_{c1}+A_2\cdot z_{c2}+A_3\cdot z_{c3}+A_4\cdot z_{c4}+A_5\cdot z_{c5}}{+A_1+A_2+A_3+A_4+A_5}$$

$$z_c=\frac{0.20a^2\cdot 0.29a+0.20a^2\cdot 0.71a+0.20a^2\cdot 0.29a+0.50a^2\cdot 1a+0.18a^2\cdot 1.33a}{+0.20a^2+0.20a^2+0.20a^2+0.50a^2+0.18a^2}$$

$$z_c=\ 0.78\,a$$

$$y_c=\frac{\sum_{i=1}^{i=5} A_i y_{ci}}{\sum_{i=1}^{i=5} A_i}=\frac{S_z}{\sum_{i=1}^{i=5} A_i}$$

$$y_c=\frac{A_1\cdot y_{c1}+A_2\cdot y_{c2}+A_3\cdot y_{c3}+A_4\cdot y_{c4}+A_5\cdot y_{c5}}{+A_1+A_2+A_3+A_4+A_5}$$

$$y_c=\frac{0.20a^2\cdot 0.71a+0.20a^2\cdot 0.71a+0.20a^2\cdot 0.29a+0.50a^2\cdot 0.25a+0.18a^2\cdot 0.73a}{+0.20a^2+0.20a^2+0.20a^2+0.50a^2+0.18a^2}$$

$$y_c=\ 0.47\,a$$

Wyznaczone momenty statyczne w układzie współrzędnych Ozy są następujące:

$S_y = 0.99a^3$
$S_z = 0.59a^3$

Momenty bezwładności względem osi Oz_c i Oy_c, określamy osobno dla każdego z pól składowych które tworzą cały przekrój. Gdy środki ciężkości poszczególnych pól składowych nie pokrywają się ze środkiem ciężkości całego przekroju należy dla każdego pola zastosować twierdzenie Stainera:

$$
\begin{aligned}
J_{zc} = \; & J_{zc1} + a_1^2 \cdot A_1 \\
& + J_{zc2} + a_2^2 \cdot A_2 \\
& + J_{zc3} + a_3^2 \cdot A_3 \\
& + J_{zc4} + a_4^2 \cdot A_4 \\
& + J_{zc5} + a_5^2 \cdot A_5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
J_{zc} = \; & + \frac{\pi \cdot d_1^4}{256} - \left(\frac{4 \cdot d_1}{3 \cdot 2 \cdot \pi}\right)^2 \cdot A_1 + (y_{c1} - y_c)^2 \cdot A_1 \\
& + \frac{\pi \cdot d_2^4}{256} - \left(\frac{4 \cdot d_2}{3 \cdot 2 \cdot \pi}\right)^2 \cdot A_2 + (y_{c2} - y_c)^2 \cdot A_2 \\
& + \frac{\pi \cdot d_3^4}{256} - \left(\frac{4 \cdot d_3}{3 \cdot 2 \cdot \pi}\right)^2 \cdot A_3 + (y_{c3} - y_c)^2 \cdot A_3 \\
& + \frac{b_4 \cdot h_4^3}{12} + (y_{c4} - y_c)^2 \cdot A_4 \\
& + \frac{b_5 \cdot h_5^3}{36} + (y_{c5} - y_c)^2 \cdot A_5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
J_{zc} = \; & + \frac{\pi \cdot (1a)^4}{256} - \left(\frac{4 \cdot 1.00a}{3 \cdot 2 \cdot \pi}\right)^2 \cdot 0.20a^2 + (0.71a - 0.47a)^2 \cdot 0.20a^2 \\
& + \frac{\pi \cdot (1a)^4}{256} - \left(\frac{4 \cdot 1.00a}{3 \cdot 2 \cdot \pi}\right)^2 \cdot 0.20a^2 + (0.71a - 0.47a)^2 \cdot 0.20a^2 \\
& + \frac{\pi \cdot (1a)^4}{256} - \left(\frac{4 \cdot 1.00a}{3 \cdot 2 \cdot \pi}\right)^2 \cdot 0.20a^2 + (0.29a - 0.47a)^2 \cdot 0.20a^2 \\
& + \frac{1.00a \cdot (0.5a)^3}{12} + (0.25a - 0.47a)^2 \cdot 0.50a^2 \\
& + \frac{0.50a \cdot (0.7a)^3}{36} + (0.73a - 0.47a)^2 \cdot 0.18a^2
\end{aligned}
$$

$$J_{zc} = +0.02a^4 + 0.02a^4 + 0.01a^4 + 0.03a^4 + 0.02a^4$$

$$\mathbf{J_{zc} = 0.09\, a^4}$$

$$
\begin{aligned}
J_{yc} = \; & J_{yc1} + a_1^2 \cdot A_1 \\
& + J_{yc2} + a_2^2 \cdot A_2 \\
& + J_{yc3} + a_3^2 \cdot A_3 \\
& + J_{yc4} + a_4^2 \cdot A_4 \\
& + J_{yc5} + a_5^2 \cdot A_5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
J_{yc} = \; & + \frac{\pi \cdot d_1^4}{256} - \left(\frac{4 \cdot d_1}{3 \cdot 2 \cdot \pi}\right)^2 \cdot A_1 + (z_{c1} - z_c)^2 \cdot A_1 \\
& + \frac{\pi \cdot d_2^4}{256} - \left(\frac{4 \cdot d_2}{3 \cdot 2 \cdot \pi}\right)^2 \cdot A_2 + (z_{c2} - z_c)^2 \cdot A_2 \\
& + \frac{\pi \cdot d_3^4}{256} - \left(\frac{4 \cdot d_3}{3 \cdot 2 \cdot \pi}\right)^2 \cdot A_3 + (z_{c3} - z_c)^2 \cdot A_3 \\
& + \frac{h_4 \cdot b_4^3}{12} + (z_{c4} - z_c)^2 \cdot A_4 \\
& + \frac{h_5 \cdot b_5^3}{36} + (z_{c5} - z_c)^2 \cdot A_5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
J_{yc} = \; & + \frac{\pi \cdot (1a)^4}{256} - \left(\frac{4 \cdot 1.00a}{3 \cdot 2 \cdot \pi}\right)^2 \cdot 0.20a^2 + (0.29a - 0.78a)^2 \cdot 0.20a^2 \\
& + \frac{\pi \cdot (1a)^4}{256} - \left(\frac{4 \cdot 1.00a}{3 \cdot 2 \cdot \pi}\right)^2 \cdot 0.20a^2 + (0.71a - 0.78a)^2 \cdot 0.20a^2 \\
& + \frac{\pi \cdot (1a)^4}{256} - \left(\frac{4 \cdot 1.00a}{3 \cdot 2 \cdot \pi}\right)^2 \cdot 0.20a^2 + (0.29a - 0.78a)^2 \cdot 0.20a^2 \\
& + \frac{0.50a \cdot (1a)^3}{12} + (1.00a - 0.78a)^2 \cdot 0.50a^2 \\
& + \frac{0.70a \cdot (0.5a)^3}{36} + (1.33a - 0.78a)^2 \cdot 0.18a^2
\end{aligned}
$$

$$J_{yc} = +0.05a^4 + 0.00a^4 + 0.05a^4 + 0.07a^4 + 0.06a^4$$

$$\mathbf{J_{yc} = 0.23\, a^4}$$

Moment dewiacji określany względem osi Oz_cy_c musi również uwzględniać położenie środka ciężkoci każdego z pól składowych w porównaniu ze środkiem ciężkości całego przekroju. Jeśli te środki ciężkości nie pokrywają się stosujemy również w tych przypadkach twierdzenie Stainera dla momentów dewiacji:

$$
\begin{aligned}
J_{zcyc} = \; & J_{zc1yc1} + a_1 \cdot \beta_1 \cdot A_1 \\
& J_{zc2yc2} + a_2 \cdot \beta_2 \cdot A_2 \\
& J_{zc3yc3} + a_3 \cdot \beta_3 \cdot A_3 \\
& J_{zc4yc4} + a_4 \cdot \beta_4 \cdot A_4 \\
& J_{zc5yc5} + a_5 \cdot \beta_5 \cdot A_5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
J_{zcyc} = \; & \left(\frac{1}{8} - \frac{4}{9 \cdot \pi}\right)\frac{d_1^4}{16} + (z_{c1} - z_c) \cdot (y_{c1} - y_c) \cdot A_1 \\
& \left(\frac{1}{8} - \frac{4}{9 \cdot \pi}\right)\frac{d_2^4}{16} + (z_{c2} - z_c) \cdot (y_{c2} - y_c) \cdot A_2 \\
& \left(\frac{1}{8} - \frac{4}{9 \cdot \pi}\right)\frac{d_3^4}{16} + (z_{c3} - z_c) \cdot (y_{c3} - y_c) \cdot A_3 \\
& + (z_{c4} - z_c) \cdot (y_{c4} - y_c) \cdot A_4 \\
& + \frac{b_5^2 \cdot h_5^2}{72} + (z_{c5} - z_c) \cdot (y_{c5} - y_c) \cdot A_5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
J_{zcyc} = \; & + \left(\frac{1}{8} - \frac{4}{9 \cdot \pi}\right)\frac{1^4 a^4}{16} + (0.29a - 0.78a) \cdot (0.71a - 0.47a) \cdot 0.20a^2 \\
& - \left(\frac{1}{8} - \frac{4}{9 \cdot \pi}\right)\frac{1^4 a^4}{16} + (0.71a - 0.78a) \cdot (0.71a - 0.47a) \cdot 0.20a^2 \\
& - \left(\frac{1}{8} - \frac{4}{9 \cdot \pi}\right)\frac{1^4 a^4}{16} + (0.29a - 0.78a) \cdot (0.29a - 0.47a) \cdot 0.20a^2 \\
& + (1.00a - 0.78a) \cdot (0.25a - 0.47a) \cdot 0.50a^2 \\
& + \frac{(0.50a)^2 \cdot (0.70a)^2}{72} + (1.33a - 0.78a) \cdot (0.73a - 0.47a) \cdot 0.18a^2
\end{aligned}
$$

$$J_{zcyc} = +0.00a^4 - 0.02a^4 - 0.00a^4 - 0.00a^4 - 0.00a^4 + 0.02a^4 - 0.02a^4 + 0.00a^4 + 0.03a^4$$

$$\mathbf{J_{zcyc} = -0.01\, a^4}$$

kąt między osią główną centralną ($Oz_{cg}y_{cg}$) a osią centralną oblicz z zależności (Oz_cy_c)

$$\text{tg } 2\alpha = \frac{2 J_{zcyc}}{J_{zc} - J_{yc}}$$

$$2 \cdot (-0.01)$$

$$2\alpha = \operatorname{arctg}\frac{\quad}{0.09 - 0.23}$$

i $\alpha = 2.94^{o}$

Główne centralne momenty bezwładności wynoszą:

$$J_1 = \frac{J_{zc} + J_{yc}}{2} + \sqrt{\left(\frac{J_{zc} - J_{yc}}{2}\right)^2 + J_{zcyc}^{\ 2}}$$

$$J_2 = \frac{J_{zc} + J_{yc}}{2} - \sqrt{\left(\frac{J_{zc} - J_{yc}}{2}\right)^2 + J_{zcyc}^{\ 2}}$$

$$J_{zcg} = J_1 = \frac{0.0913\,a^4 + 0.2282\,a^4}{2} + \sqrt{\left(\frac{0.0913\,a^4 - 0.2282\,a^4}{2}\right)^2 + (-0.0071\,a^4)^2} = 0.2286\,a^4$$

$$J_{ycg} = J_2 = \frac{0.0913\,a^4 + 0.2282\,a^4}{2} - \sqrt{\left(\frac{0.0913\,a^4 - 0.2282\,a^4}{2}\right)^2 + (-0.0071\,a^4)^2} = 0.091\,a^4$$

Niezmienniki momentów bezwładności:

$$I_1 = J_1 + J_2 = J_{xc} + J_{yc}$$
$$I_1 = 0.229\ a^4 + 0.091\ a^4 = 0.091\ a^4 + 0.228\ a^4$$
$$I_1 = 0.31955\ a^4 = 0.31955\ a^4$$

$$I_2 = J_1 \cdot J_2 = J_{xc} \cdot J_{yc} - J_{xcyc}^{\ 2}$$
$$I_2 = 0.229\ a^4 \cdot 0.091\ a^4 = 0.091\ a^4 \cdot 0.228\ a^4 - \ -0.007^2\ a^8$$
$$I_2 = 0.021\ a^8 = 0.021\ a^8$$

Analizowany przekrój możesz teraz wykorzystać:

- w zginaniu projektując przekrój zginanej belki gdy występuje bądź zginanie ukośne.